

УДК 517.5+517.17+517.18+511.72

# НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ ЗІ СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ БУДОВОЮ, ВИЗНАЧЕНІ В ТЕРМІНАХ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ЗНАКОПОЧЕРЕЖНИМИ РЯДАМИ КАНТОРА

С. О. Сербенюк

АНОТАЦІЯ. Робота присвячена одному нескінченнопараметричному класу неперервних функцій зі складною локальною будовою, визначених в термінах зображення чисел знакопочережними рядами Кантора. Основна увага приділяється диференціальним, інтегральним та іншим властивостям функцій. Знайдено умови монотонності та нїде немонотонності, вказано систему функціональних рівнянь, розв'язком якої є функція із заданого класу.

ABSTRACT. The article is devoted to one infinite parametric class of continuous functions with complicated local structure such that these functions are defined in terms of alternating Cantor series representation of numbers. The main attention is given to differential, integral and other properties of these functions. Conditions of monotony and nonmonotony are discovered. The functional equations system, that the function from the given class of functions is a solution of the system is indicated.

*Ключові слова:* знакопочережний ряд Кантора, система функціональних рівнянь, монотонна функція, неперервна нїде немонотонна функція, сингулярна функція, нїде недиференційовна функція, функція розподїлу.

*Keywords:* alternating Cantor series, functional equations system, monotonic function, continuous nowhere monotonic function, singular function, nowhere differentiable function, distribution function.

## 1. ВСТУП

В сучасних наукових дослідженнях для задання функцій зі складною локальною будовою (сингулярних, неперервних нїде недиференційовних) широко використовуються різні представлення дійсних чисел. Наприклад, представлення чисел знакододатними та знакопочережними рядами, члени яких є числами, оберненими до натуральних або добутків натуральних чисел.

У даній статті розглядається застосування до побудови монотонних сингулярних та неперервних нїде немонотонних функцій розкладів дійсних чисел в нескінченні ряди, члени яких є раціональними числами. Традиційно найпростішими прикладами таких рядів вважають  $s$ -ве та нега- $s$ -ве зображення.

В [11] Георг Кантор вперше обґрунтував можливість представлення будь-якого дійсного числа  $x \in [0; 1]$  у вигляді розкладу в знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n},$$

де  $(d_n)$  — фіксована послїдовність натуральних чисел  $d_n$ , більших 1,  $(A_{d_n})$  — послїдовність алфавїтів  $A_{d_n} \equiv \{0, 1, \dots, d_n - 1\}$ ,  $\varepsilon_n \in A_{d_n}$ .

Останній ряд в науковій літературі називають знакододатним рядом Кантора (або рядом Кантора). Очевидно, представлення дійсних чисел знакододатними рядами Кантора є узагальненням  $s$ -ої системи числення. Тому логічно було б припустити можливість зображення дійсних чисел у вигляді розкладу в *знакопочережний ряд Кантора*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n}, \quad (1)$$

який є узагальненням негa- $s$ -го розкладу дійсного числа.

У даній роботі зосереджено увагу на дослідженні основних властивостей функцій зі складною локальною будовою, аргумент яких представлений знакопочережним рядом Кантора виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} (-1)^{n+1}, \text{ де } \varepsilon_n \in A_{d_n}, \quad (2)$$

оскільки областю визначення досліджуваних функцій є відрізок  $[0; 1]$ , довільне число з якого можна представити саме у вигляді розкладу в останній ряд.

Перш ніж перейти до висвітлення основних результатів дослідження, розглянемо питання про приналежність розкладу (1) і, як наслідок, розкладу (2) до систем числення.

## 2. ТЕОРЕМА ПРО РОЗКЛАД ЧИСЛА В ЗНАКОПОЧЕРЕЖНИЙ РЯД КАНТОРА

**Теорема 1.** *Кожне число  $x \in [a_0 - 1; a_0]$ , де*

$$a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 \dots d_n},$$

*можна представити у вигляді розкладу в знакопочережний ряд Кантора (1) не більш ніж двома способами.*

Аналогічне твердження для  $x \in [0; 1]$  справедливе і для знакопочережних рядів (2), оскільки послідовність  $(d_n)$  є фіксованою, звідки слідує, що  $a_0 = \text{const}$ .

**Означення 1.** Представлення довільного числа  $x$  з відрізка  $[a_0 - 1; a_0]$  (або з  $[0; 1]$ ) у вигляді розкладу в знакопочережний ряд Кантора (1) (або (2)) називається *негa- $D$ -представленням*, де  $D \equiv (d_n)$ , (або *негa- $(d_n)$ -представленням*) числа  $x$  і позначається  $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-D}$  (або  $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-(d_n)}$ ). Останні позначення називаються *негa- $D$ -зображенням* (або *негa- $(d_n)$ -зображенням*) числа  $x$  відповідно.

Твердження останньої теореми слідує з тверджень наступних двох лем.

**Лема 1.** *Для будь-якого  $x \in [a_0 - 1; a_0]$  існує послідовність  $(\varepsilon_n)$  така, що число  $x$  можна представити у вигляді розкладу в знакопочережний ряд Кантора (1).*

*Доведення.* Очевидно, що

$$a_0 = \max \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} \right\} \equiv \Delta_{0[d_2-1]0[d_4-1]0[d_6-1]0\dots}^{-D},$$

$$a_0 - 1 = \min \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} \right\} \equiv \Delta_{[d_1-1]0[d_3-1]0[d_5-1]0\dots}^{-D}.$$

Нехай  $x$  — довільне число з  $(a_0 - 1; a_0)$ . Оскільки

$$-\frac{\varepsilon_1}{d_1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}} < x \leq -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}}$$

при  $0 \leq \varepsilon_1 \leq d_1 - 1$ , а також

$$[a_0 - 1; a_0] = I_0 = \bigcup_{i=0}^{d_1-1} \left[ -\frac{i}{d_1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}}; -\frac{i}{d_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}} \right],$$

тому

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}} < x + \frac{\varepsilon_1}{d_1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}}.$$

Позначимо  $x + \frac{\varepsilon_1}{d_1} = x_1$ . Отримаємо випадки:

(1)

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}}.$$

В такому разі отримаємо, що

$$x = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1]0[d_4-1]0\dots}^{-D} \text{ або } x = \Delta_{[\varepsilon_1-1]0[d_3-1]0[d_5-1]0\dots}^{-D}.$$

(2) Якщо не справджується рівність, зазначена у першому випадку, тоді

$$x = -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + x_1, \text{ де}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}} \leq x_1 < \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}}.$$

Позначивши  $x_2 = x_1 - \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2}$ , отримаємо знову ж таки два випадки:

(1)

$$x_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}}.$$

У такому разі

$$x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 [d_3-1]0[d_5-1]0\dots}^{-D} \text{ або } x = \Delta_{\varepsilon_1 [\varepsilon_2-1]0[d_4-1]0[d_6-1]0\dots}^{-D}.$$

(2) Якщо умова першого випадку знову ж таки не виконується, отримаємо

$$x = -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + x_2, \text{ де}$$

$$-\frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}} < x_2 \leq -\frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}} \text{ і т. д.}$$

За скінченну кількість кроків  $m$  отримаємо подвійну строгу нерівність

$$\frac{(-1)^{m+1}\varepsilon_{m+1}}{d_1 d_2 \dots d_{m+1}} - \sum_{k > \frac{m+2}{2}} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}} < x_m < \frac{(-1)^{m+1}\varepsilon_{m+1}}{d_1 d_2 \dots d_{m+1}} + \sum_{k > \frac{m+1}{2}} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}},$$

але в залежності від парності  $m$  одна з нерівностей за певних умов може перетворюватись в рівність. Тобто, можливі випадки:

(1)

$$x_{m+1} = \begin{cases} \sum_{k > \frac{m+2}{2}} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}}, & \text{якщо } m \text{ — непарне;} \\ \sum_{k > \frac{m+1}{2}} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}}, & \text{якщо } m \text{ — парне.} \end{cases}$$

В такому разі

$$x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m+1} [d_{m+2}-1] 0 [d_{m+4}-1] 0 \dots}^{-D} \text{ або } x = \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m [\varepsilon_{m+1}-1] 0 [d_{m+3}-1] 0 [d_{m+5}-1] 0 \dots}^{-D}.$$

(2) У випадку, коли не існує такого  $m \in \mathbb{N}$ , щоб виконувалась хоча б одна з умов останньої системи, отримаємо

$$x = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} + x_{m+1}.$$

Продовжуючи процес до нескінченності, отримаємо

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + x_1 = -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + x_2 = \dots = \\ &= -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} - \frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} + \dots + \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} + x_n = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n}. \end{aligned}$$

□

**Лема 2.** Числа  $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1} \varepsilon_m \varepsilon_{m+1} \dots}^{-D}$  та  $x' = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1} \varepsilon'_m \varepsilon'_{m+1} \dots}^{-D}$ , де  $\varepsilon_m \neq \varepsilon'_m$ , співпадають тоді і тільки тоді, коли справедливою є одна із систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{m+2i-1} = d_{m+2i-1} - 1, \\ \varepsilon_{m+2i} = 0 = \varepsilon'_{m+2i-1}, \\ \varepsilon'_{m+2i} = d_{m+2i} - 1, \\ \varepsilon'_m = \varepsilon_m - 1; \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{m+2i} = d_{m+2i} - 1, \\ \varepsilon_{m+2i-1} = 0 = \varepsilon'_{m+2i}, \\ \varepsilon'_{m+2i-1} = d_{m+2i-1} - 1, \\ \varepsilon'_m - 1 = \varepsilon_m; \end{array} \right.$$

для всіх  $i \in \mathbb{N}$ .

*Доведення. Необхідність.* Нехай  $\varepsilon_m = \varepsilon'_m + 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} 0 &= x - x' = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1} \varepsilon_m \varepsilon_{m+1} \dots}^{-D} - \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1} \varepsilon'_m \varepsilon'_{m+1} \dots}^{-D} = \\ &= \frac{(-1)^m}{d_1 d_2 \dots d_m} + \frac{(-1)^{m+1}(\varepsilon_{m+1} - \varepsilon'_{m+1})}{d_1 d_2 \dots d_{m+1}} + \dots + \\ &+ \frac{\varepsilon_{m+i} - \varepsilon'_{m+i}}{d_1 d_2 \dots d_{m+i}} (-1)^{m+i} + \dots = \frac{(-1)^m}{d_1 d_2 \dots d_m} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (\varepsilon_{m+i} - \varepsilon'_{m+i})}{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+i}} \right). \end{aligned}$$

$$v \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (\varepsilon_{m+i} - \varepsilon'_{m+i})}{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+i}} \geq - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{m+i} - 1}{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+i}} = -1.$$

Остання нерівність перетворюється в рівність лише в тому випадку, коли

$$\varepsilon_{m+2i} = \varepsilon'_{m+2i-1} = 0 \text{ і } \varepsilon_{m+2i-1} = d_{m+2i-1} - 1, \quad \varepsilon'_{m+2i} = d_{m+2i} - 1.$$

Тобто, в даному випадку з рівності  $x = x'$  випливають умови першої системи. Аналогічним чином, з умови  $x = x'$  при  $\varepsilon'_m = \varepsilon_m + 1$  випливають умови другої системи.

Достатність є очевидною.  $\square$

При подальшому дослідженні використовуватимуться допоміжні поняття неа- $(d_n)$ -раціонального та неа- $(d_n)$ -ірраціонального чисел.

**Означення 2.** Числа, що мають два різних неа- $(d_n)$ -зображення, а саме:

$$\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1}-1] 0 [d_{n+3}-1] \dots}^{-(d_n)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n-1] 0 [d_{n+2}-1] 0 [d_{n+4}-1] \dots}^{-(d_n)},$$

називаються *неа- $(d_n)$ -раціональними*. Решта чисел з  $[0; 1]$  називаються *неа- $(d_n)$ -ірраціональними* і мають єдине неа- $(d_n)$ -зображення.

### 3. ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ.

Нехай  $P = \|p_{i,n}\|$  — задана матриця, така, що  $n = 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{0, d_n - 1}$ , і для якої справедливою є наступна система властивостей:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1^\circ. & \forall n \in \mathbb{N} : p_{i,n} \in (-1; 1); \\ 2^\circ. & \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{d_n-1} p_{i,n} = 1; \\ 3^\circ. & \forall (i_n), i_n \in A_{d_n} : \prod_{n=1}^{\infty} |p_{i_n,n}| = 0; \\ 4^\circ. & \forall i_n \in A_{d_n} \setminus \{0\} : \sum_{i=0}^{i_n-1} p_{i,n} > 0. \end{array} \right.$$

Нехай  $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-(d_n)}$ . Розглянемо функцію виду

$$\tilde{F}(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \beta_{\varepsilon_n,n} &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } \varepsilon_n = 0; \\ \sum_{i=0}^{\varepsilon_n-1} p_{i,n} > 0, & \text{якщо } \varepsilon_n \neq 0, \end{cases} \\ \tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} &= \begin{cases} \beta_{\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ \beta_{d_n-1-\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — парне,} \end{cases} \\ \tilde{p}_{\varepsilon_n(x),n} &= \begin{cases} p_{\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ p_{d_n-1-\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — парне.} \end{cases} \end{aligned}$$

Дослідимо наявність інших способів для задання досліджуваних функцій. Для цього скористаємося взаємозв'язком знакопочередного та знакододатного канторівських представлень:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} (-1)^{n+1} \equiv \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-(d_n)} \equiv \Delta_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \varepsilon_3 [d_4 - 1 - \varepsilon_4] \dots}^D \equiv \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{d_2 - 1 - \varepsilon_2}{d_1 d_2} + \dots$$

З останнього випливає, що

$$\tilde{F}(x) = F(g(x)) = F \circ g,$$

де

$$x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-(d_n)} \xrightarrow{g} \Delta_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \dots \varepsilon_{2n-1} [d_{2n} - 1 - \varepsilon_{2n}] \dots}^D = g(x) = y,$$

$$F \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} \right) = \beta_{\varepsilon_1, 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \beta_{\varepsilon_n, n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j, j} \right).$$

Корисним при дослідженні різних способів задання функції  $\tilde{F}$  є поняття оператора зсуву цифр представлення дійсного числа знакододатним рядом Кантора.

**Означення 3.** Оператором зсуву цифр представлення числа  $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^D$  знакододатним рядом Кантора називається відображення  $\hat{\varphi}$ , задане наступним чином:

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_2 d_3 \dots d_n}.$$

Точніше,  $\hat{\varphi}(x) = d_1 x - \varepsilon_1(x) \equiv d_1 \Delta_{0 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots}^D$ . Варто відмітити, що

$$\hat{\varphi}^k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_{k+1} d_{k+2} \dots d_n} \equiv d_1 d_2 \dots d_k \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_k}_{\varepsilon_{k+1} \varepsilon_{k+2} \varepsilon_{k+3} \dots}^D,$$

$$\frac{i}{d_k} + \frac{\hat{\varphi}^k(x)}{d_k} = d_1 d_2 \dots d_{k-1} \Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{k-1}}_{i \varepsilon_{k+1} \varepsilon_{k+2} \varepsilon_{k+3} \dots}^D = \hat{\varphi}^{k-1}(x). \quad (3)$$

Легко показати, що досліджувана функція  $\tilde{F}$  в класі визначених та обмежених на відрізьку функцій є єдиним розв'язком наступних (еквівалентних між собою в силу рівності (3)) нескінченних систем функціональних рівнянь. А саме:

•

$$f \left( \frac{\tilde{i}(x) + \hat{\varphi}^k(y)}{d_k} \right) = \tilde{\beta}_{i(x), k} + \tilde{p}_{i(x), k} \cdot f(\hat{\varphi}^k(y)),$$

де  $k = 1, 2, \dots, i \in A_{d_k}$ ,

$$\tilde{i}(x) = \begin{cases} i(x), & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ d_k - 1 - i(x), & \text{якщо } k \text{ — парне;} \end{cases}$$

•

$$f(\hat{\varphi}^k(y)) = \tilde{\beta}_{\varepsilon_{k+1}(x), k+1} + \tilde{p}_{\varepsilon_{k+1}(x), k+1} f(\hat{\varphi}^{k+1}(y)),$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots, \varepsilon_{k+1} \in A_{d_{k+1}}$  і  $y = \Delta_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \varepsilon_3 \dots [d_{2n} - 1 - \varepsilon_{2n}] \varepsilon_{2n+1} \dots}^D$ .

Справді,

$$\tilde{F}(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{n=2}^k \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j} \right) + \left( \prod_{j=1}^k \tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j} \right) \cdot f(\hat{\varphi}^k(y)),$$

де  $y = \Delta_{\varepsilon_1(x)[d_2-1-\varepsilon_2(x)]\varepsilon_3(x)[d_4-1-\varepsilon_4(x)]\dots}^D$ . Оскільки функція  $\tilde{F}$  є визначеною та обмеженою на  $[0; 1]$ , в силу третьої властивості матриці  $P$  при граничному переході в останній рівності при  $k \rightarrow \infty$  легко помітити справедливність доводжуваного твердження.

Самим важливим твердженням даного пункту статті є відповідь на питання про коректність означеної функції. Тобто, під коректністю функції розуміється неіснування двох і більше різних значень функції для довільного аргументу з її області визначення.

**Лема 3.** *Функція  $y = \tilde{F}(x)$  є коректно означеною в довільній точці відрізка  $[0; 1]$ .*

*Доведення.* Для доведення твердження леми достатньо розглянути випадок, коли аргумент функції є нега- $(d_n)$ -раціональним числом. Нехай  $x$  — нега- $(d_n)$ -раціональне число.

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} \delta &= \tilde{F}(\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1}-1] 0 [d_{n+3}] 0 \dots}^{-(d_n)}) - \tilde{F}(\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n-1] 0 [d_{n+2}-1] 0 [d_{n+4}-1] 0 \dots}^{-(d_n)}) = \\ &= \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \cdot [(\tilde{\beta}_{\varepsilon_n, n} + \tilde{\beta}_{d_{n+1}-1, n+1} \tilde{p}_{\varepsilon_n, n} + \tilde{\beta}_{0, n+2} \tilde{p}_{\varepsilon_n, n} \tilde{p}_{d_{n+1}-1, n+1} + \\ &+ \tilde{\beta}_{d_{n+3}-1, n+3} \tilde{p}_{\varepsilon_n, n} \tilde{p}_{d_{n+1}-1, n+1} \tilde{p}_{0, n+2} + \dots) - (\tilde{\beta}_{\varepsilon_n-1, n} + \tilde{\beta}_{0, n+1} \tilde{p}_{\varepsilon_n-1, n} + \\ &+ \tilde{\beta}_{d_{n+2}-1, n+2} \tilde{p}_{\varepsilon_n-1, n} \tilde{p}_{0, n+1} + \tilde{\beta}_{0, n+3} \tilde{p}_{\varepsilon_n-1, n} \tilde{p}_{0, n+1} \tilde{p}_{d_{n+2}-1, n+2} + \dots)]. \end{aligned}$$

Для парного  $n$

$$\begin{aligned} \delta &= \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) [\beta_{d_n-1-\varepsilon_n, n} + \beta_{d_{n+1}-1, n+1} p_{d_n-1-\varepsilon_n, n} + \\ &+ p_{d_n-1-\varepsilon_n, n} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{d_{n+k}-1, n+k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_{n+j}-1, n+j} \right)] - \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \times \\ &\times \left[ \beta_{d_n-\varepsilon_n, n} + \beta_{0, n+1} p_{d_n-\varepsilon_n, n} + p_{d_n-\varepsilon_n, n} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{0, n+k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{0, n+j} \right) \right] = \\ &= \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \cdot (-p_{d_n-\varepsilon_n-1, n} + (1 - p_{d_{n+1}-1, n+1}) p_{d_n-\varepsilon_n-1, n} + \\ &+ p_{d_n-\varepsilon_n-1, n} \sum_{k=2}^{\infty} \left[ (1 - p_{d_{n+k}-1, n+k}) \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_{n+j}-1, n+j} \right]) = 0. \end{aligned}$$

У випадку непарного  $n$  отримаємо

$$\delta = (p_{\varepsilon_n-1,n} - (1 - p_{d_{n+1}-1,n+1})p_{\varepsilon_n-1,n} - (1 - p_{d_{n+2}-1,n+2})p_{\varepsilon_n-1,n}p_{d_{n+1}-1,n+1} - \dots) \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} = 0.$$

□

Перейдемо до розгляду властивостей функції  $\tilde{F}(x)$ .

#### 4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА МОНОТОННІСТЬ

**Теорема 2.** Функція  $\tilde{F}$  є :

- неперервною;
- монотонно неспадною за умови невід'ємності елементів матриці  $P$ , зокрема, строго зростаючою за умови, коли всі елементи  $p_{i,n}$  матриці  $P$  є додатними;

*Доведення. Неперервність.* Нехай маємо довільне число  $x_0 = \Delta_{\varepsilon_1(x_0)\varepsilon_2(x_0)\dots\varepsilon_{n_0}(x_0)\varepsilon_{n_0+1}(x_0)\dots}^{-(d_n)}$  з відрізка  $[0; 1]$ . Нехай  $x = \Delta_{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\dots\varepsilon_{n_0}(x)\varepsilon_{n_0+1}(x)\dots}^{-(d_n)}$  — таке число, для якого справедливими є умови, що  $\varepsilon_j(x) = \varepsilon_j(x_0)$  при  $j = \overline{1, n_0 - 1}$  та  $\varepsilon_{n_0}(x) \neq \varepsilon_{n_0}(x_0)$ . Розглянемо різницю

$$\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0) = \left( \prod_{j=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x_0),j} \right) \left( \tilde{F}(\hat{\varphi}^{n_0-1}(x)) - \tilde{F}(\hat{\varphi}^{n_0-1}(x_0)) \right).$$

Таким чином,

$$|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0)| \leq \left( \prod_{j=1}^{n_0-1} |\tilde{p}_{\varepsilon_j(x_0),j}| \right) \leq \left( \max_{j=1, n_0-1} |\tilde{p}_{\varepsilon_j(x_0),j}| \right)^{n_0-1} \rightarrow 0 \quad (n_0 \rightarrow \infty),$$

що еквівалентно умові  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0)$ .

Справді, для неа- $(d_n)$ -іраціонального числа  $x_0$  умови  $x \rightarrow x_0$  та  $n_0 \rightarrow \infty$  є еквівалентними і тому не виникає сумнівів щодо неперервності функції  $\tilde{F}$ .

Нехай  $x_0$  — неа- $(d_n)$ -раціональне число. У такому разі неперервність функції  $\tilde{F}$  в неа- $(d_n)$ -раціональній точці  $x_0$  можна довести, використовуючи поняття односторонніх границь з врахуванням випадків парного та непарного  $n_0$ .

*Монотонність.* Нехай елементи  $p_{i,n}$  матриці  $P$  є невід'ємними. Очевидно, що

$$\tilde{F}(0) = \tilde{F}(\Delta_{0[d_2-1]0[d_4-1]\dots}^{-(d_n)}) = \beta_{0,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \beta_{0,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{0,j} \right) = \min_{x \in [0;1]} \tilde{F}(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(1) &= \tilde{F}(\Delta_{[d_1-1]0[d_3-1]0\dots}^{-(d_n)}) = \beta_{d_1-1,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \beta_{d_n-1,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{d_j-1,j} \right) = \\ &= \max_{x \in [0;1]} \tilde{F}(x) = 1. \end{aligned}$$



Нехай  $x_1 = \Delta_{\varepsilon_1(x_1)\varepsilon_2(x_1)\dots\varepsilon_n(x_1)}^{-(d_n)}$  та  $x_2 = \Delta_{\varepsilon_1(x_2)\varepsilon_2(x_2)\dots\varepsilon_n(x_2)}^{-(d_n)}$  — деякі числа ( $x_1 < x_2$ ). Очевидно, існує такий номер  $n_0$ , що  $\varepsilon_j(x_1) = \varepsilon_j(x_2)$  для всіх  $j = \overline{1, n_0-1}$  та  $\varepsilon_{n_0}(x_1) < \varepsilon_{n_0}(x_2)$  при непарному  $n_0$  або  $\varepsilon_{n_0}(x_1) > \varepsilon_{n_0}(x_2)$  у випадку парного  $n_0$ .

Отже,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) &= \left( \prod_{j=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j} \right) \cdot (\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m} \prod_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m} \prod_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j} \right) ). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \kappa &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m} \prod_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m} \prod_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j} \right) \geq \\ &\geq - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m} \prod_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j} \right), \end{aligned}$$

де для непарного  $n_0$

$$\kappa \geq -p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} (1 - p_{d_{n_0+1}-1,n_0+1} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[ (1 - p_{d_{n_0+m}-1,n_0+m}) \prod_{j=1}^{m-1} p_{d_{n_0+j}-1,n_0+j} \right]) = -p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}$$

та для парного  $n_0$  по аналогії отримаємо

$$\kappa \geq -p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} \cdot \left( \max_{x \in [0,1]} \tilde{F}(\hat{\varphi}^{n_0}(x)) \right) = -p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}.$$

Як наслідок, у випадку непарного  $n_0$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) &= \left( \prod_{j=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j} \right) \cdot (\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + \kappa) \geq \\ &\geq \left( \prod_{j=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j} \right) \cdot (p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + p_{\varepsilon_{n_0}(x_1)+1,n_0} + \dots + p_{\varepsilon_{n_0}(x_2)-1,n_0} - p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}) \geq 0 \end{aligned}$$

та у випадку парного  $n_0$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) &= \left( \prod_{j=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j} \right) \cdot (\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + \kappa) = \\ &= \left( \prod_{i=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{i,\varepsilon_i(x_2)} \right) \cdot (p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + p_{d_{n_0}-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + \dots + \\ &+ p_{d_{n_0}-2-\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}) \geq 0. \end{aligned}$$

Цілком очевидно, що коли коли всі елементи  $p_{i,n}$  матриці  $P$  є додатними, справедливою буде умова  $\tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) > 0$ .  $\square$

Нехай елементи  $p_{i,n}$  матриці  $P$  є невід'ємними.

Нехай  $\eta$  — випадкова величина, представлена у вигляді наступного канторівського розкладу

$$\eta = \frac{\xi_1}{d_1} + \frac{\xi_2}{d_1 d_2} + \frac{\xi_3}{d_1 d_2 d_3} + \dots + \frac{\xi_k}{d_1 d_2 \dots d_k} + \dots \equiv \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^D,$$

де

$$\xi_k = \begin{cases} \varepsilon_k, & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ d_k - 1 - \varepsilon_k, & \text{якщо } k \text{ — парне.} \end{cases}$$

та цифри  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) є випадковими і набувають значень  $0, 1, \dots, d_k - 1$  з ймовірностями  $p_{0,k}, p_{1,k}, \dots, p_{d_k-1,k}$ . Тобто,  $\xi_k$  — незалежні та  $P\{\xi_k = i_k\} = p_{i_k,k}$ ,  $i_k \in A_{d_k}$ .

В силу означення функції розподілу та рівностей

$$\begin{aligned} \{\eta < x\} &= \{\xi_1 < \varepsilon_1(x)\} \cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 < d_2 - 1 - \varepsilon_2(x)\} \cup \dots \cup \\ &\cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = d_2 - 1 - \varepsilon_2(x), \dots, \xi_{2k-1} < \varepsilon_{2k-1}(x)\} \cup \\ &\cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = d_2 - 1 - \varepsilon_2(x), \dots, \xi_{2k-1} = \varepsilon_{2k-1}(x), \xi_{2k} < d_{2k} - 1 - \varepsilon_{2k}(x)\} \cup \dots, \\ P\{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = d_2 - 1 - \varepsilon_2(x), \dots, \xi_{2k-1} < \varepsilon_{2k-1}(x)\} &= \end{aligned}$$

$$= \beta_{\varepsilon_{2k-1}(x), 2k-1} \prod_{j=1}^{2k-2} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x), j}$$

і

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = d_2 - 1 - \varepsilon_2(x), \dots, \xi_{2k} < d_{2k} - 1 - \varepsilon_{2k}(x)\} &= \\ = \beta_{d_{2k}-1-\varepsilon_{2k}(x), 2k} \prod_{j=1}^{2k-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x), j}, \end{aligned}$$

наслідком останньої теореми є наступна лема.

**Лема 4.** Функція розподілу  $\tilde{F}_\eta$  випадкової величини  $\eta$  має вигляд

$$\tilde{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \beta_{\varepsilon_1(x), 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \tilde{\beta}_{\varepsilon_k(x), k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x), j} \right], & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

де  $\tilde{p}_{\varepsilon_j(x), j} \geq 0$ .

## 5. ІНТЕГРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ.

**Теорема 3.** Функція  $y = \tilde{F}(x)$  є інтегрованою за Лебегом, причому

$$\int_0^1 \tilde{F}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\beta}_{0,n} + \tilde{\beta}_{1,n} + \tilde{\beta}_{2,n} + \dots + \tilde{\beta}_{d_n-1,n}}{d_1 d_2 \dots d_n}.$$

*Доведення.* Позначимо  $y = g(x)$  (функцію  $g$  було означено в пункті 3). Використовуючи означення функції  $\tilde{F}$  (в тому числі і властивості, що слідують з різних способів задання досліджуваної функції) та властивості інтеграла Лебега, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{F}(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{d_1}} F(y) dy + \int_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} F(y) dy + \dots + \int_{\frac{d_1-1}{d_1}}^1 F(y) dy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{d_1}} p_{0,1} F(\hat{\varphi}(y)) dy + \int_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} [p_{0,1} + p_{1,1} F(\hat{\varphi}(y))] dy + \\ &+ \int_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} [\beta_{2,1} + p_{2,1} F(\hat{\varphi}(y))] dy + \dots + \int_{\frac{d_1-1}{d_1}}^1 [\beta_{d_1-1,1} + p_{d_1-1,1} F(\hat{\varphi}(y))] dy. \end{aligned}$$

Оскільки  $y = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{1}{d_1} \hat{\varphi}(y)$  і, як наслідок  $dy = \frac{1}{d_1} d(\hat{\varphi}(y))$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{F}(x) dx &= \frac{p_{0,1}}{d_1} \int_0^1 F(\hat{\varphi}(y)) d(\hat{\varphi}(y)) + \beta_{1,1} y \Big|_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} + \frac{p_{1,1}}{d_1} \int_0^1 F(\hat{\varphi}(y)) d(\hat{\varphi}(y)) + \beta_{2,1} y \Big|_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} + \\ &+ \frac{p_{2,1}}{d_1} \int_0^1 F(\hat{\varphi}(y)) d(\hat{\varphi}(y)) + \dots + \beta_{d_1-1,1} y \Big|_{\frac{d_1-1}{d_1}}^1 + \frac{p_{d_1-1,1}}{d_1} \int_0^1 F(\hat{\varphi}(y)) d(\hat{\varphi}(y)) = \\ &= \frac{\beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \dots + \beta_{d_1-1,1}}{d_1} + \frac{1}{d_1} \int_0^1 F(\hat{\varphi}(y)) d(\hat{\varphi}(y)). \end{aligned}$$

Аналогічно, враховуючи взаємозв'язок D-зображення та нега- $(d_n)$ -зображення, на другому кроці отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(\hat{\varphi}(y)) d(\hat{\varphi}(y)) &= \int_{\frac{d_2-1}{d_2}}^1 p_{0,2} F(\hat{\varphi}^2(y)) d(\hat{\varphi}(y)) + \\ &+ \int_{\frac{d_2-2}{d_2}}^{\frac{d_2-1}{d_2}} [\beta_{1,2} + p_{1,2} F(\hat{\varphi}^2(y))] d(\hat{\varphi}(y)) + \dots + \int_0^{\frac{1}{d_2}} [\beta_{d_2-1,2} + p_{d_2-1,2} F(\hat{\varphi}^2(y))] d(\hat{\varphi}(y)). \end{aligned}$$

Оскільки  $\hat{\varphi}(y) = \frac{d_2-1-\varepsilon_2}{d_2} + \frac{1}{d_2} \hat{\varphi}^2(y)$  та  $d(\hat{\varphi}(y)) = \frac{1}{d_2} d(\hat{\varphi}^2(y))$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(\hat{\varphi}(y)) d(\hat{\varphi}(y)) &= \frac{p_{0,2}}{d_2} \int_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y)) d(\hat{\varphi}^2(y)) + \beta_{1,2} y \Big|_{\frac{d_2-2}{d_2}}^{\frac{d_2-1}{d_2}} + \\ &+ \frac{p_{1,2}}{d_2} \int_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y)) d(\hat{\varphi}^2(y)) + \dots + \beta_{d_2-1,2} y \Big|_0^{\frac{1}{d_2}} + \frac{p_{d_2-1,2}}{d_2} \int_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y)) d(\hat{\varphi}^2(y)) = \\ &= \frac{\beta_{1,2} + \beta_{2,2} + \dots + \beta_{d_2-1,2}}{d_2} + \frac{1}{d_2} \int_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y)) d(\hat{\varphi}^2(y)). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{F}(x) dx &= \frac{\beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \dots + \beta_{d_1-1,1}}{d_1} + \\ &+ \frac{\beta_{1,2} + \beta_{2,2} + \dots + \beta_{d_2-1,2}}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_1 d_2} \int_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y)) d(\hat{\varphi}^2(y)). \end{aligned}$$

По аналогії, на кроці  $n$  отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{F}(x) dx &= \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\beta}_{0,j} + \tilde{\beta}_{1,j} + \tilde{\beta}_{2,j} + \dots + \tilde{\beta}_{d_j-1,j}}{d_1 d_2 \dots d_j} + \\ &+ \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_n} \int_0^1 F(\hat{\varphi}^n(y)) d(\hat{\varphi}^n(y)). \end{aligned}$$

Продовжуючи процес до нескінченності, отримаємо

$$\int_0^1 \tilde{F}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\beta}_{0,n} + \tilde{\beta}_{1,n} + \tilde{\beta}_{2,n} + \dots + \tilde{\beta}_{d_n-1,n}}{d_1 d_2 \dots d_n}.$$

□

## 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ У ВИПАДКУ НЕВІД'ЄМНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЦІ $P$ .

Нехай елементи  $p_{i,n}$  матриці  $P$  є невід'ємними.

**Лема 5.** *Справедливими є наступні рівності:*

(1)

$$\mu_{\tilde{F}}(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-(d_n)}) = \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{c_j, j} \geq 0.$$

(2) *Нехай  $x_0 = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-(d_n)}$  — нега- $(d_n)$ -іраціональна точка, тоді*

$$\tilde{F}'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^n d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right).$$

*Доведення.* (1) Обчислимо приріст  $\mu_{\tilde{F}}$  функції  $\tilde{F}$  на циліндрах  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-(d_n)}$ . Тобто, на відрізках

$$\begin{aligned} &\left[ \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n-1}}^{-(d_n)} [d_{2n-1}] 0 [d_{2n+2}-1] 0 [d_{2n+4}-1] \dots; \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n-1}}^{-(d_n)} [d_{2n+1}-1] 0 [d_{2n+3}-1] \dots \right], \\ &\left[ \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n}}^{-(d_n)} 0 [d_{2n+2}-1] 0 [d_{2n+4}-1] \dots; \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n}}^{-(d_n)} [d_{2n+1}-1] 0 [d_{2n+3}-1] 0 [d_{2n+5}-1] \dots \right]. \\ &\mu_{\tilde{F}}(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n-1}}^{-(d_n)}) = \tilde{F}\left(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n-1}}^{-(d_n)} [d_{2n+1}-1] 0 [d_{2n+3}-1] \dots\right) - \\ &\quad - \tilde{F}\left(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n-1}}^{-(d_n)} [d_{2n-1}] 0 [d_{2n+2}-1] 0 [d_{2n+4}-1] \dots\right) = \\ &= \left( \prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{p}_{c_j, j} \right) (\beta_{d_{2n-1}, 2n} + \beta_{d_{2n+1}-1, 2n+1} p_{d_{2n-1}, 2n} + \beta_{d_{2n+2}-1, 2n+2} p_{d_{2n-1}, 2n} p_{d_{2n+1}-1, 2n+1} + \dots) = \\ &= \left( \prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{p}_{c_j, j} \right) (1 - p_{d_{2n-1}, 2n} + (1 - p_{d_{2n+1}-1, 2n+1}) p_{d_{2n-1}, 2n} + \\ &\quad + (1 - p_{d_{2n+2}-1, 2n+2}) p_{d_{2n-1}, 2n} p_{d_{2n+1}-1, 2n+1} + \dots) = \left( \prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{p}_{c_j, j} \right). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
 \mu_{\tilde{F}} \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n}}^{-(d_n)} \right) &= \tilde{F} \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n} [d_{2n+1}-1] 0 [d_{2n+3}-1] 0 [d_{2n+5}-1] \dots}^{-(d_n)} \right) - \\
 &\quad - \tilde{F} \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2n} 0 [d_{2n+2}-1] 0 [d_{2n+4}-1] \dots}^{-(d_n)} \right) = \\
 &= \left( \prod_{j=1}^{2n} \tilde{p}_{c_j, j} \right) (\beta_{d_{2n+1}-1, 2n+1} + \beta_{d_{2n+2}-1, 2n+2} p_{d_{2n+1}-1, 2n+1} + \\
 &\quad + \beta_{d_{2n+3}-1, 2n+3} p_{d_{2n+1}-1, 2n+1} p_{d_{2n+2}-1, 2n+2} + \dots) = \left( \prod_{j=1}^{2n} \tilde{p}_{c_j, j} \right).
 \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\mu_{\tilde{F}} \left( \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-(d_n)} \right) = \left( \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{c_j, j} \right) \geq 0.$$

(2) Знайдемо похідну функції  $\tilde{F}$  в нега- $(d_n)$ -іраціональній точці  $x_0 = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-(d_n)}$ .  
Оскільки

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-(d_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-(d_n)}, \\
 \tilde{F}'(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\tilde{F}} \left( \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-(d_n)} \right)}{|\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-(d_n)}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^n \tilde{p}_{\varepsilon_j, j}}{\frac{1}{d_1 d_2 \dots d_n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^n d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} (d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Оскільки досліджувана функція є неперервною та монотонною, то вона (згідно теореми Лебега) має скінченну похідну майже скрізь в розумінні міри Лебега. Проте, у випадку, коли  $a_n = d_n \tilde{p}_{\varepsilon_n, n} > 1$  для всіх натуральних чисел  $n$  за винятком, можливо, скінченної кількості, отримаємо  $\tilde{F}'(x_0) = \infty$ . Тому:

- у випадку, коли для скінченної множини значень  $n$  справджується  $a_n \geq 1$ , отримаємо  $\tilde{F}'(x_0) = 0$ ;
- у випадку, коли  $a_n = 1$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  (що є справедливим лише для функції  $\tilde{F}(x) = x$ ), отримаємо  $\tilde{F}'(x_0) = 1$ ;
- у випадку, коли лише для скінченної кількості номерів справджується умова  $p_{\varepsilon_n, n} \neq \frac{1}{d_n}$ , отримаємо  $0 \leq \tilde{F}'(x_0) < \infty$ .

□

## 7. САМОАФІННІСТЬ.

**Теорема 4.** Якщо елементи  $p_{i,n}$  матриці  $P$  є додатними, то графік  $\Gamma_{\tilde{F}}$  функції  $\tilde{F}$  в просторі  $\mathbb{R}^2$  є множиною виду

$$\Gamma_{\tilde{F}} = \bigcup_{x \in [0;1]} (x; \dots \circ \psi_{\varepsilon_n, n} \circ \dots \circ \psi_{\varepsilon_2, 2} \circ \psi_{\varepsilon_1, 1}(x)),$$

$$\partial e \ x = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\dots}^D,$$

$$\psi_{i_n, n} : \begin{cases} x' = \frac{1}{d_n}x + \frac{\omega_{i_n, n}}{d_n}; \\ y' = \tilde{\beta}_{i_n, n} + \tilde{p}_{i_n, n}y, \end{cases}$$

$$\omega_{i_n, n} = \begin{cases} i_n, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ d_n - 1 - i_n, & \text{якщо } n \text{ — парне,} \end{cases}$$

$$i_n \in A_{d_n}.$$

*Доведення.* Оскільки умови

$$f(x) = \beta_{i,1} + p_{i,1}f(\hat{\varphi}(x)),$$

$$f\left(\frac{i+x}{d_1}\right) = \beta_{i,1} + p_{i,1}f(x)$$

є еквівалентними для  $x = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\dots}^D$ , тому очевидно, що

$$\psi_{i_1, 1} : \begin{cases} x' = \frac{1}{d_1}x + \frac{i_1}{d_1}; \\ y' = \beta_{i_1, 1} + p_{i_1, 1}y. \end{cases}$$

Перейдемо до афінних перетворень  $\psi_{i,2}$ ,  $i = \overline{0, d_2 - 1}$ . Оскільки рівності

$$f(\hat{\varphi}(x)) = \beta_{d_2-1-i, 2} + p_{d_2-1-i, 2}f(\hat{\varphi}^2(x)),$$

$$f\left(\frac{d_2 - 1 - i + \hat{\varphi}(x)}{d_2}\right) = \beta_{d_2-1-i, 2} + p_{d_2-1-i, 2}f(\hat{\varphi}(x))$$

є еквівалентними, тоді

$$\psi_{i_2, 2} : \begin{cases} x' = \frac{1}{d_2}x + \frac{d_2 - 1 - i_2}{d_2}; \\ y' = \beta_{d_2-1-i_2, 2} + p_{d_2-1-i_2, 2}y. \end{cases}$$

По індукції отримаємо:

$$\psi_{i_n, n} : \begin{cases} x' = \frac{1}{d_n}x + \frac{\omega_{i_n, n}}{d_n}; \\ y' = \tilde{\beta}_{i_n, n} + \tilde{p}_{i_n, n}y. \end{cases}$$

Отже,

$$\bigcup_{x \in [0;1]} (x; \dots \circ \psi_{\varepsilon_n, n} \circ \dots \circ \psi_{\varepsilon_2, 2} \circ \psi_{\varepsilon_1, 1}(x)) \equiv G \subset \Gamma_{\tilde{F}}.$$

Нехай  $T(x_0, \tilde{F}(x_0)) \in \Gamma_{\tilde{F}}$ . Розглянемо точку  $x_n = \hat{\varphi}^n(x_0)$ , де  $x_0 = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4] \dots}^D$  — деяка фіксована точка з  $[0; 1]$ .

В силу того, що для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$   $\varepsilon_n$  і  $d_n - 1 - \varepsilon_n$  належать множині  $A_{d_n}$ ,

$$f(\hat{\varphi}^k(x_0)) = \tilde{\beta}_{\varepsilon_{k+1}, k+1} + \tilde{p}_{\varepsilon_{k+1}, k+1} f(\hat{\varphi}^{k+1}(x_0)), \quad k = 0, 1, \dots$$

та з того, що  $\bar{T}(\hat{\varphi}^k(x_0); \tilde{F}(\hat{\varphi}^k(x_0))) \in \Gamma_{\tilde{F}}$  випливає

$$\psi_{i_k, k} \circ \dots \circ \psi_{i_2, 2} \circ \psi_{i_1, 1}(\bar{T}) = T_0(x_0; \tilde{F}(x_0)) \in \Gamma_{\tilde{F}}, \quad i_k \in A_{d_k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Звідси й слідує, що  $\Gamma_{\tilde{F}} \subset G$ . Отже,

$$\Gamma_{\tilde{F}} = \bigcup_{x \in [0; 1]} (x; \dots \circ \psi_{\varepsilon_n, n} \circ \dots \circ \psi_{\varepsilon_2, 2} \circ \psi_{\varepsilon_1, 1}(x)).$$

□

## 8. НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ

Розглянемо випадок, коли елементи матриці  $P = \|p_{i,n}\|$  можуть бути як невід'ємними, так і від'ємними числами. Тобто, нехай  $p_{i,n} \in (-1; 1)$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i = \overline{0, d_n - 1}$ .

В такому разі з пункту 1 леми 5 слідує, що якщо для кожного  $n \in \mathbb{N}$  числа  $p_{i,n}$ ,  $i = \overline{0, d_n - 1}$ , є як невід'ємними, так і від'ємними числами, то функція  $\tilde{F}$  не має жодного проміжку монотонності.

**Теорема 5.** *Нехай  $p_{\varepsilon_n, n} \cdot p_{\varepsilon_{n-1}, n} < 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_n \in A_{d_n} \setminus \{0\}$  та*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n d_k p_{0,k} \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n d_k p_{d_k-1,k} \neq 0$$

*одночасно. Тоді функція  $\tilde{F}$  є ніде не диференційовною на  $[0; 1]$ .*

*Доведення.* Виберемо деяку нега- $(d_n)$ -раціональну точку  $x_0$ :

$$x_0 = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1}-1] 0 [d_{n+3}-1] \dots}^{-(d_n)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n-1] 0 [d_{n+2}-1] 0 [d_{n+4}-1] \dots}^{-(d_n)},$$

де  $\varepsilon_n \neq 0$ .

Введемо деякі позначення. Нехай  $n$  — непарне. Тоді

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1}-1] 0 [d_{n+3}-1] \dots}^{-(d_n)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n-1] 0 [d_{n+2}-1] 0 [d_{n+4}-1] \dots}^{-(d_n)} = x_0^{(2)}$$

та у випадку парного  $n$

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n-1] 0 [d_{n+2}-1] 0 [d_{n+4}-1] \dots}^{-(d_n)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1}-1] 0 [d_{n+3}-1] \dots}^{-(d_n)} = x_0^{(2)}.$$

Розглянемо числові послідовності  $(x'_k)$ ,  $(x''_k)$ :

$$x'_k = \begin{cases} \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1}-1] 0 [d_{n+3}-1] 0 \dots [d_{n+k-1}-1] 1 [d_{n+k+1}-1] 0 [d_{n+k+3}-1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — непарне, } k \text{ — парне;} \\ \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1}-1] 0 \dots [d_{n+k-2}-1] 0 [d_{n+k}-2] 0 [d_{n+k+2}-1] 0 [d_{n+k+4}-1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — непарне, } k \text{ — непарне;} \\ \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n-1] 0 [d_{n+2}-1] 0 [d_{n+4}-1] 0 \dots [d_{n+k-1}-1] 1 [d_{n+k+1}-1] 0 [d_{n+k+3}-1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — парне, } k \text{ — непарне;} \\ \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n-1] 0 [d_{n+2}-1] 0 \dots [d_{n+k-2}-1] 0 [d_{n+k}-2] 0 [d_{n+k+2}-1] 0 [d_{n+k+4}-1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — парне, } k \text{ — парне,} \end{cases}$$

$$x_k'' = \begin{cases} \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n - 1] 0 [d_{n+2} - 1] 0 \dots [d_{n+k-1} - 1] 0 0 [d_{n+k+2} - 1] 0 [d_{n+k+4} - 1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — непарне, } k \text{ — непарне;} \\ \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n - 1] 0 [d_{n+2} - 1] 0 \dots [d_{n+k} - 1] [d_{n+k+1} - 1] 0 [d_{n+k+3} - 1] 0 [d_{n+k+5} - 1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — непарне, } k \text{ — парне;} \\ \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1} - 1] 0 [d_{n+3} - 1] \dots 0 [d_{n+k} - 1] [d_{n+k+1} - 1] 0 [d_{n+k+3} - 1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — парне, } k \text{ — непарне;} \\ \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n [d_{n+1} - 1] 0 \dots [d_{n+k-1} - 1] 0 0 [d_{n+k+2} - 1] 0 [d_{n+k+4} - 1] 0 [d_{n+k+6} - 1] \dots}^{-(d_n)}, & n \text{ — парне, } k \text{ — парне,} \end{cases}$$

Тобто,

$$x_k' = x_0^{(1)} + \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_{n+k}},$$

$$x_k'' = x_0^{(2)} - \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_{n+k}}$$

та  $x_k' \rightarrow x_0$ ,  $x_k'' \rightarrow x_0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Нехай  $n$  — непарне. Тоді

$$y_0^{(1)} = g(x_0^{(1)}) = \Delta_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \varepsilon_3 [d_4 - 1 - \varepsilon_4] \varepsilon_5 \dots [d_{n-1} - 1 - \varepsilon_{n-1}] \varepsilon_n (0)},$$

$$y_0^{(2)} = g(x_0^{(2)}) = \Delta_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \varepsilon_3 [d_4 - 1 - \varepsilon_4] \dots [d_{n-1} - 1 - \varepsilon_{n-1}] [\varepsilon_n - 1] [d_{n+1} - 1] [d_{n+2} - 1] [d_{n+3} - 1] \dots},$$

$$y_k' = g(x_k') = \Delta_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \varepsilon_3 [d_4 - 1 - \varepsilon_4] \dots [d_{n-1} - 1 - \varepsilon_{n-1}] \varepsilon_n \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 1(0)},$$

$$y_k'' = g(x_k'') = \Delta_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \varepsilon_3 [d_4 - 1 - \varepsilon_4] \dots [d_{n-1} - 1 - \varepsilon_{n-1}] [\varepsilon_n - 1] [d_{n+1} - 1] [d_{n+2} - 1] \dots [d_{n+k} - 1] (0)},$$

де (як згадувалося вище)  $\tilde{F}(x) = F(g(x)) = F \circ g$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_k') &= F(y_k') = \beta_{\varepsilon_1, 1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t, t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) + \beta_{\varepsilon_n, n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} + \\ &+ \left( \sum_{l=n+1}^{n+k-1} \left( \beta_{0, l} \prod_{m=n+1}^{l-1} p_{0, m} \right) \right) \cdot \left( \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) + \beta_{1, n+k} \left( \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k-1} p_{0, m} \right), \\ \tilde{F}(x_0^{(1)}) &= F(y_0^{(1)}) = \beta_{\varepsilon_1, 1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t, t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) + \beta_{\varepsilon_n, n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\tilde{F}(x_k') - \tilde{F}(x_0^{(1)}) = \beta_{1, n+k} \left( \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k-1} p_{0, m} \right) = \left( \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} p_{0, m} \right).$$

В свою чергу

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_0^{(2)}) &= F(y_0^{(2)}) = \beta_{\varepsilon_1, 1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t, t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) + \beta_{\varepsilon_n - 1, n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} + \\ &+ \beta_{\varepsilon_n - 1, n} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \left( \sum_{l=n+1}^{\infty} \left[ \beta_{d_l - 1, l} \prod_{m=n+1}^{l-1} p_{d_m - 1, m} \right] \right), \\ \tilde{F}(x_k'') &= F(y_k'') = \beta_{\varepsilon_1, 1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t, t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) + \beta_{\varepsilon_n - 1, n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} + \end{aligned}$$



$$+p_{\varepsilon_n-1,n} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) \left( \sum_{l=n+1}^{n+k} \left[ \beta_{d_l-1,l} \prod_{m=n+1}^{l-1} p_{d_m-1,m} \right] \right).$$

Звідки

$$\tilde{F}(x_0^{(2)}) - \tilde{F}(x_k'') = p_{\varepsilon_n-1,n} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} p_{d_m-1,m} \right).$$

Перейдемо до розгляду випадку, коли  $n$  — парне. В такому разі

$$y_0^{(1)} = g(x_0^{(1)}) = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\dots\varepsilon_{n-1}[d_n-\varepsilon_n]}(0),$$

$$y_0^{(2)} = g(x_0^{(2)}) = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\dots\varepsilon_{n-1}[d_n-\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\dots},$$

$$y_k' = g(x_k') = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\dots\varepsilon_{n-1}[d_n-\varepsilon_n]} \underbrace{0 \dots 0}_{k-1}(0),$$

$$y_k'' = g(x_k'') = \Delta_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\dots\varepsilon_{n-1}[d_n-1-\varepsilon_n][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\dots[d_{n+k}-1]}(0),$$

Як наслідок,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_k') = F(y_k') &= \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) + \beta_{d_n-\varepsilon_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} + \\ &+ \beta_{1,n+k} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k-1} p_{0,m} \right) p_{d_n-\varepsilon_n,n}, \\ \tilde{F}(x_0^{(1)}) = F(y_0^{(1)}) &= \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) + \beta_{d_n-\varepsilon_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_k') - \tilde{F}(x_0^{(1)}) &= \beta_{1,n+k} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k-1} p_{0,m} \right) p_{d_n-\varepsilon_n,n} = \\ &= \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} p_{0,m} \right) p_{d_n-\varepsilon_n,n}. \end{aligned}$$

В свою чергу

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_0^{(2)}) = F(y_0^{(2)}) &= \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) + \beta_{d_n-1-\varepsilon_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} + \\ &+ \left( \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) \left( \sum_{l=n+1}^{\infty} \left[ \beta_{d_l-1,l} \prod_{m=n+1}^{l-1} p_{d_m-1,m} \right] \right), \\ \tilde{F}(x_k'') = F(y_k'') &= \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left( \tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t} \prod_{j=1}^{t-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) + \beta_{d_n-1-\varepsilon_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} + \\ &+ \left( \prod_{j=1}^n \tilde{p}_{\varepsilon_j,j} \right) \left( \sum_{l=n+1}^{n+k} \left[ \beta_{d_l-1,l} \prod_{m=n+1}^{l-1} p_{d_m-1,m} \right] \right). \end{aligned}$$

Звідки

$$\tilde{F}(x_0^{(2)}) - \tilde{F}(x_k'') = p_{d_n-1-\varepsilon_n, n} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \cdot \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} p_{d_m-1, m} \right).$$

Таким чином,

$$B_k' = \frac{\tilde{F}(x_k') - \tilde{F}(x_0)}{x_k' - x_0} = \begin{cases} (d_n p_{\varepsilon_n, n}) \left( \prod_{j=1}^{n-1} d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{0, m} \right), & n - \text{непарне}; \\ (d_n p_{d_n-\varepsilon_n, n}) \left( \prod_{j=1}^{n-1} d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{0, m} \right), & n - \text{парне}. \end{cases}$$

$$B_k'' = \frac{\tilde{F}(x_0) - \tilde{F}(x_k'')}{x_0 - x_k''} = \begin{cases} (d_n p_{\varepsilon_n-1, n}) \left( \prod_{j=1}^{n-1} d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{d_m-1, m} \right), & n - \text{непарне}; \\ (d_n p_{d_n-1-\varepsilon_n, n}) \left( \prod_{j=1}^{n-1} d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} \right) \left( \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{d_m-1, m} \right), & n - \text{парне}. \end{cases}$$

Позначимо  $b_{0,k} = \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{0, m}$  і  $b_{d_k-1, k} = \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{d_m-1, m}$ .

Оскільки,  $\prod_{j=1}^{n-1} d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j, j} = \text{const}$ ,  $p_{\varepsilon_n, n} p_{\varepsilon_n-1, n} < 0$ ,  $p_{d_n-\varepsilon_n, n} p_{d_n-1-\varepsilon_n, n} < 0$  та за умовою теореми послідовності  $(b_{0,k})$ ,  $(b_{d_k-1, k})$  не збігаються до 0 одночасно, отримаємо наступні випадки:

- (1) якщо для всіх  $k \in \mathbb{N}$  за винятком, можливо, скінченної множини номерів  $k$ :  $d_k p_{0, k} > 1$  та  $d_k p_{d_k-1, k} > 1$ , то одна з послідовностей  $B_k'$ ,  $B_k''$  прямує до  $\infty$ , а інша — до  $-\infty$ ;
- (2) якщо для всіх  $k \in \mathbb{N}$  за винятком, можливо, скінченної множини номерів  $k$ : один з добутків  $d_k p_{0, k}$ ,  $d_k p_{d_k-1, k}$  є більшим 1, а інший — меншим 1, тоді одна з послідовностей  $B_k'$ ,  $B_k''$  прямує до  $\pm\infty$ , а інша — до 0;
- (3) якщо для всіх  $k \in \mathbb{N}$  за винятком, можливо, скінченної множини номерів  $k$ : один з добутків  $d_k p_{0, k}$ ,  $d_k p_{d_k-1, k}$  є більшим 1, а інший — рівним 1, тоді одна з послідовностей  $B_k'$ ,  $B_k''$  прямує до  $\pm\infty$ , а інша є сталою послідовністю;
- (4) якщо для всіх  $k \in \mathbb{N}$  за винятком, можливо, скінченної множини номерів  $k$ : один з добутків  $d_k p_{0, k}$ ,  $d_k p_{d_k-1, k}$  є меншим 1, а інший — рівним 1, тоді одна з послідовностей  $B_k'$ ,  $B_k''$  прямує до 0, а інша є сталою послідовністю;
- (5) якщо для всіх  $k \in \mathbb{N}$  добутки  $d_k p_{0, k}$ ,  $d_k p_{d_k-1, k}$  є рівними 1, то послідовності  $B_k'$ ,  $B_k''$  є різними сталими послідовностями, оскільки  $p_{\varepsilon_n, n} \neq p_{\varepsilon_n-1, n}$ ,  $p_{d_n-\varepsilon_n, n} \neq p_{d_n-1-\varepsilon_n, n}$  в силу умов  $p_{\varepsilon_k, k} \in (-1; 1)$  та  $\beta_{\varepsilon_k, k} > 0$  для  $\varepsilon_k > 0$ .

Таким чином, функція  $\tilde{F}$  є ніде не диференційовною на  $[0; 1]$ , оскільки у всіх випадках  $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k' \neq \lim_{k \rightarrow \infty} B_k''$ .  $\square$

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Барановський О. М., Працьовита І. М., Працьовитий М. В. Про одну функцію, пов'язану з рядами Остроградського 1-го та 2-го видів // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2009, № 10. — С. 40 — 49.
- [2] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

- [3] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. — 2011. — № 23. — С. 178 —189.
- [4] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2002, №3. — С. 351-362.
- [5] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы// Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГПИ. — 1989. — С. 95-105.
- [6] *Сербенюк С. О.* Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега- $s$ -кового та канторівського нега- $s$ -кового зображень// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, №15. — С. 168-187.
- [7] *Сербенюк С. О.* Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, №14. — С. 253-267.
- [8] *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, №13(2). — С. 166-182.
- [9] *Сербенюк С. О.* Функції, означені системами функціональних рівнянь у термінах зображення чисел рядами Кантора // Наукові записки НаУКМА. — 2015. — Т. 165: Фізико-математичні науки. — С. 34-40.
- [10] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.,* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.
- [11] *Cantor G.* Ueber die einfachen Zahlensysteme // Z. Mathl. Phys. — 1869.— Bd. 14.— S. 121–128.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА

*E-mail address:* [simon6@ukr.net](mailto:simon6@ukr.net); [simon.mathscience@imath.kiev.ua](mailto:simon.mathscience@imath.kiev.ua)